A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI





XIV. kötet 3. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésén bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.


# FOLYTONOS ÁLLAPOTÚ MARKOV-FOLYAMATOK STATISZTIKAI VIZSGÁLATÁRÓL, III.


Írta: ARATÓ MÁTYÁS


## Bevezetés

Az előző két részben, [1], [2] az időben folytonos és diszkrét egydimenziós stacionárius *Gauss—Markov* folyamat statisztikai vizsgálatáról volt szó, míg ebben a részben a hasonló típusú kétdimenziós (komplex) folyamattal kapcsolatos problémák tárgyalására kerül sor. Ilyen típusú folyamatok statisztikai vizsgálatának elvégzésének szükségessége a LOMONOSZOV EGYETEM VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI TANSZÉKén vetődött fel egy geofizikai probléma vizsgálatának kapcsán. A problémát egy külön pontban ismertetem, ott mutatok rá a fizikai jelenség teljes vizsgálatával kapcsolatos további lehetőségekre is. Az elért eredmények megbeszélése a tanszéken rendszeres volt, jelen dolgozat ezen eredményeket ismerteti, kidolgozásukban a szerző is részt vett. Az eredményekről A. N. KOLMOGOROV, JA. G. SZINAJ és a szerző egy közös dolgozata [4], a számításokról és az ahhoz szükséges apparátusról RIKOVA, SZINAJ és a szerző [5] dolgozata számol be. Részletes bizonyítások a [4] cikkben nem szerepelnek, a jelen dolgozatban szereplő bizonyításokat a szerző dolgozta ki — a 3. § kivételével, mely a SZINAJ-jal közös s a [3] disszertációban szereplő eredményeket tartalmazza.

## IDŐBEN FOLYTONOS, STACIONÁRIUS, NORMÁLIS, KOMPLEX ESET

### 1. § Az időben folytonos folyamat leírása

Tekintsük azt a kétdimenziós stacionárius sztochasztikus folyamatot, melynek $\xi(t)$, $\eta(t)$ komponensei eleget tesznek a

$$
\begin{aligned}
d\xi &= -\lambda\xi dt \cancel{+} \omega\eta dt + d\varepsilon_1 \\
d\eta &= \omega\xi dt - \lambda\eta dt + d\varepsilon_2
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

sztochasztikus differenciálegyenleteknek, ahol $\varepsilon_1(t)$ és $\varepsilon_2(t)$ két független *Wiener-folyamat*

$$M d\varepsilon_1 = M d\varepsilon_2 = 0, \quad M(d\varepsilon_1)^2 = M(d\varepsilon_2)^2 = a \cdot dt$$

paraméterekkel. Feltéve, hogy

$$\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t), \quad \chi(t) = \varepsilon_1(t) + i\varepsilon_2(t), \quad \gamma = \lambda - i\omega$$

az (1.1) rendszert egyetlen egyenlet alakjában írhatjuk fel,

$$d\zeta = -\gamma\zeta dt + d\chi. \tag{1.1'}$$

A $\zeta(t)$ folyamat komplex korrelációs függvénye (vö. [1] 1.2. tétel)

$$C(\tau) = A(\tau) + iB(\tau) = M[\zeta(t)\overline{\zeta(t+\tau)}] = \sigma^2 \exp(-\lambda|\tau| - i\omega\tau) \tag{1.2}$$

ahol $\sigma^2 = a/\lambda$ (az (1.1') egyenlet alapján). A $\zeta(t)$ folyamatnak a $[0, T)$ intervallumon való realizációja alapján értelmezhetjük a

$$c(\tau) = a(\tau) + ib(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} \zeta(t)\overline{\zeta(t+\tau)}\, dt \tag{1.3}$$

empirikus korrelációs függvényét, mely 0-ban jobbról differenciálható 1 valószínűséggel és

$$c'(0) = -a - \frac{1}{T}s_1^2 + \frac{1}{T}s_2^2 - ir, \tag{1.4}$$

ahol $a$ a fenti $\varepsilon_1'(t)$ és $\varepsilon_2'(t)$ „fehér zaj" folyamatokat jellemző intenzitás paramétere, míg

$$s_1^2 = \frac{1}{2}[|\zeta(0)|^2 + |\zeta(T)|^2], \quad s_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |\zeta(t)|^2\, dt, \quad r = \frac{1}{T}\int_0^T |\zeta(t)|^2\, d\theta.$$

Az $r$ integrál kifejezésében szereplő $\theta$ argumentum a

$$\zeta(t) = |\zeta(t)|\, e^{i\theta(t)}$$

összefüggés alapján van meghatározva.

Az (1.4) összefüggés igazolása a következőképpen történik. Könnyű megmutatni, hogy

$$\frac{c(\tau+h) - c(\tau)}{h} = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} \zeta(t)\, d\overline{\zeta(t)} + \frac{1}{(T-\tau)^2}\int_0^{T-\tau} \zeta(t)\overline{\zeta(t+h)}\, dt - \tag{1.5}$$

$$- \frac{1}{T-\tau}\zeta(T-\tau)\overline{\zeta(T)} + o(1).$$

Másrészt a komplex folyamatra érvényes (vö. I. rész (1.10))

$$\sum_2^n |\zeta(t_i) - \zeta(t_{i-1})|^2 \to 2aT,$$

(ahol a konvergencia 1 valószínűséggel és négyzetes középben is érvényes) összefüggés alapján könnyű belátni, hogy a

$$\sum_2^n \zeta(t_{i-1})[\zeta(t_i) - \zeta(t_{i-1})]$$



összeg határértékeként értelmezett

$$\int_0^T \zeta(t)\, d\zeta(t)$$

integrál értéke

$$-aT + \frac{|\zeta(T)|^2 - |\zeta(0)|^2}{2} - i\int_0^T |\zeta(t)|^2\, d\theta. \tag{1.6}$$

Egyszerű számolással belátható ugyanis, hogy

$$\sum_2^n |\zeta(t_i) - \zeta(t_{i-1})|^2 = \sum_2^n [\zeta(t_i)\overline{\zeta(t_i)} - \zeta(t_{i-1})\overline{\zeta(t_i)} - \zeta(t_t)\overline{\zeta(t_{i-1})} - \zeta(t_{i-1})\overline{\zeta(t_{i-1})}] =$$

$$= -2\sum_2^n \zeta(t_{i-1})[\overline{\zeta(t_i) - \zeta(t_{i-1})}] + |\zeta(T)|^2 - |\zeta(0)|^2 + \sum_2^n [\zeta(t_{i-1})\overline{\zeta(t_i)} - \zeta(t_i)\overline{\zeta(t_{i-1})}] =$$

$$= -2\sum_2^n \zeta(t_{i-1})[\overline{\zeta(t_i) - \zeta(t_{i-1})}] + |\zeta(T)|^2 - |\zeta(0)|^2 +$$

$$+ \sum_2^n |\zeta(t_i)|\,|\zeta(t_{i-1})|[e^{i(\theta(t_{i-1}) - \theta(t_i))} - e^{i(\theta(t_i) - \theta(t_{i-1}))}].$$

(1.5) és (1.6) összevetéséből adódik (1.4).

## 2. § A paraméterek becslései s azok eloszlásai

Az előző pontban már szerepelt, hogy ugyanúgy, mint az egydimenziós esetben az $a$ diffúziós paraméter pontosan becsülhető egyetlen realizáció alapján, mivel

$$\sum_1^n |\xi(t_i) - \xi(t_{i-1})|^2 \to aT, \quad \text{ha} \quad n \to \infty, \ \max|t_i - t_{i-1}| \to 0$$

és

$$\sum_1^n |\eta(t_i) - \eta(t_{i-1})|^2 \to aT, \quad \text{ha} \quad n \to \infty, \ \max|t_i - t_{i-1}| \to 0.$$

Az ismeretlen paraméterek tehát $\lambda$ és $\omega$. Jelölje a $[0, T]$ intervallum realizációinak terén a $\zeta(t)$ folyamathoz tartozó mértéket $P$. Ugyanezen a téren vezessük be a

$$V = L \times W$$

standard mértéket, ahol $L$ a közönséges *Lebesgue*-mérték a $\zeta(0)$ síkon, míg $W$ a $\zeta(t) - \zeta(0)$ növekmények terén a kétdimenziós *Wiener*-mérték a $\chi(t)$ (vö. (1.1')) folyamat paramétereivel. Ismeretes (l. [14], vö. az első rész (2.1) képletével), hogy

$$\frac{dP}{dV} = \frac{\lambda}{\pi \cdot a^2} \exp\left[-\frac{\lambda^2+\omega^2}{2a} T s_2^2 - \frac{\lambda}{a} s_1^2 + \lambda T + \frac{\omega}{a} Tr\right] \tag{2.1}$$ [1]

A (2.1) összefüggés szerint az $s_1^2, s_2^2, r$ rendszer a feladat elégséges statisztika rendszere. $\omega$ és $\lambda$ szerint differenciálva az

$$L = \log \frac{dP}{dV} = -\log \pi a^2 + \log \lambda - \frac{\lambda^2+\omega^2}{2a} T s_2^2 - \frac{\lambda}{a} s_1^2 + \lambda T + \frac{\omega}{a} Tr$$

kifejezést a

$$\frac{\partial L}{\omega \omega} = -\frac{\omega}{a} T s_2^2 + \frac{T}{a} r \doteq 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{a} T s_2^2 - \frac{s_1^2}{a} + T = 0 \tag{2.3}$$

egyenleteket kapjuk az $\hat{\omega}$ és $\hat{\lambda}$ maximum likelihood becslések meghatározására. (2.2)-ből

$$\check{\omega} = \frac{r}{s_2^2} \tag{2.2'}$$

míg (2.3)-ból a $\lambda T = \varkappa$, $\hat{\lambda} \cdot T = \hat{\varkappa}$ jelöléssel $\hat{\varkappa}$-ra a

$$h_2 \hat{\varkappa}^2 + (h_1 - 1)\hat{\varkappa} - 1 = 0 \tag{2.3'}$$

egyenletet kapjuk, ahol $h_1 = s_1^2/aT$, $h_2 = s_2^2/aT$. (2.3′) egyetlen pozitív megoldásának eloszlására a 3. §-ban visszatérünk.

Legyen $\sigma^2(\hat{\omega}) = \dfrac{2a}{Ts_2^2}$. Bebizonyítjuk a következő tételt.

[1] Ugyanúgy, mint azt az első részben [1] láttuk, a *Radon—Nikodym* derivált levezethető heurisztikusan az $\varepsilon_1(t)$ és $\varepsilon_2(t)$ funkcionáljainak segítségével is. A komplex esetben ugyanis a *Radon—Nikodym* derivált

$$C(\lambda)\exp\left\{-\frac{|\zeta(0)|^2}{a}\lambda - \frac{1}{2a}\int_0^T \frac{(d\xi + \lambda\xi\, dt + \omega\eta\, dt)^2}{dt} - \frac{1}{2a}\int_0^T \frac{(d\eta - \omega\xi\, dt + \lambda\eta\, dt)^2}{dt}\right\} =$$

$$= C(\lambda)\exp\left\{-\frac{|\zeta(0)|^2}{a}\lambda - \frac{\lambda^2+\omega^2}{2a}\int_0^T |\zeta(t)|\, dt - \frac{\lambda}{a}\int_0^T (\xi d\xi + \eta d\eta) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2a}\int_0^T \left[\frac{(d\xi)^2}{dt} + \frac{(d\eta)^2}{dt}\right] - \frac{\omega}{a}\int_0^T (\eta d\xi - \xi d\eta)\right\}.$$

alakú, melyből (2.1) formálisan könnyen megkapható, amint azt a fenti kifejezésben szereplő integrálokra vonatkozó összefüggések mutatni fogják.



2.1. TÉTEL. *Az $\hat{\omega}$ maximum likelihood becslés esetén a*

$$\frac{\hat{\omega} - \omega}{\sigma(\hat{\omega})}$$

*változó* (0,1) *paraméterű normális eloszlású.*

Megjegyzés. A tétel érdekessége éppen az, hogy nem aszimptotikus, hanem pontos eloszlást ad az $\hat{\omega}$ becslésre.

*Bizonyítás:* Egyszerű átalakításokkal belátható, hogy

$$\frac{\hat{\omega} - \omega}{\sigma(\hat{\omega})} = \sqrt{\frac{1}{2aT}}\, \frac{\int_0^T |\zeta(t)|^2 (d\Theta - \omega\, dt)}{\left(\int_0^T |\zeta(t)|^2\, dt\right)^{1/2}}$$

és állításunk igazolására elegendő belátni, hogy ($T$ helyett egy $dt$ hosszúságú intervallumon integrálva) a

$$|\zeta(t)|(d\theta - \omega dt)\sqrt{2adt}$$

valószínűségi változó (0,1) normális eloszlású. Az (1.1′) egyenlet alapján

$$|\zeta|(d\theta - \omega dt) = d\varepsilon_2 \cdot \cos\theta - d\varepsilon_1 \cdot \sin\theta,$$

ahonnan állításunk azonnal következik, mivel $d\varepsilon_2$ és $d\varepsilon_1$ független normális eloszlású változók.

A fenti tétel rámutat a $\zeta(t)$ folyamat által leírt mozgás jellegére: egy $\omega$ átlag szögsebességgel mozgó pont, melynek origótól való távolsága $|\zeta|$. [2]

## 3. § Konfidencia intervallumok szerkesztése a $\lambda$ paraméterre

Ebben a részben feltesszük, hogy a $\zeta(t)$ komplex stacionárius *Gauss—Markov* folyamat összes paraméterei ismertek $\lambda$ kivételével. Az egyszerűség kedvéért legyen $M\xi(t) = M\eta(t) = 0$ és $M\xi^2(t) = M\eta^2(t) = 1/2\lambda$. Ilyen feltételek mellett kiszámítjuk az elégséges statisztika rendszer karakterisztikus függvényét és megmutatjuk a megfelelő konfidencia intervallumok szerkesztésének módját. Mint már említettem, az ismertetendő eredmények, valamint a számítások JA. G. SZINAJ, L. RIKOVA

[2] Az időben diszkrét esetre való áttérés szempontjából igen hasznos a

$$\int_0^T |\zeta(t)|^2 d\theta = \int_0^T (\xi d\eta - \eta d\xi) \tag{$*$}$$

összefüggés is, mely egyszerűen igazolható a

$$\sum \left[\zeta(t_i)\overline{\zeta(t_{i-1})} - \zeta(t_{i-1})\overline{\zeta(t_i)}\right] = 2i \sum \left[\eta(t_i)\big(\xi(t_i) - \xi(t_{i-1})\big) - \xi(t_i)\big(\eta(t_i) - \eta(t_{i-1})\big)\right]$$

azonosság alapján, melyből ($*$) éppen úgy megkapható, mint ahogyan azt (1.6) bizonyításánál tettük.

és a szerző nevéhez fűződnek [5]. Mint (2.1)-ből látható, elégséges statisztika rendszert a

$$\chi_1(T) = \frac{1}{2}\{\xi^2(0)+\eta^2(0)+\xi^2(T)+\eta^2(T)\}, \tag{3.1}$$

$$\chi_2(T) = \int_0^T (\xi^2(t)+\eta^2(t))\,dt$$

statisztikák alkotnak. Ezen mennyiségek karakterisztikus függvényének meghatározására a következő parciális differenciálegyenletet lehet felírni. (Különböző funkcionálokra vonatkozó differenciálegyenletek létezési és egyértelműségi kérdéseivel foglalkozik DINKIN [7] dolgozata.) Legyen

$$u(T, x, y) = M\{e^{i\alpha_1\chi_2(T)+i\alpha_2\chi_2(T)}\big|_{\substack{\xi(0)=x\\ \eta(0)=y}}\}, \tag{3.2}$$

azaz a $\chi_1$ és $\chi_2$ változók feltételes karakterisztikus függvénye a $\xi(0)=x$, $\eta(0)=y$ feltétel mellett. Nyilván

$$u(T+\Delta T, x, y) = \frac{1}{2\pi\Delta T}\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1-x+\lambda x\Delta T+\omega y\Delta T)^2}{2\Delta T}-\frac{(y_1-y-\omega x\Delta T+\lambda y\Delta T)^2}{2\Delta T}}. \tag{3.3}$$

$$\cdot u(T, x, y\Big\{[1+i\alpha_2\Delta T(x^2+y^2)]\Big[1-i\alpha_1\Big(\frac{(x_1-x)^2}{2}+\frac{(y_1-y)^2}{2}+$$

$$+x(x_1-x)+y(y_1-y)\Big)+\frac{\alpha_1^2}{2}(x^2(x_1-x)^2+y^2(y_1-y)^2+$$

$$+2y(x_1-x)(y_1-y)+\ldots)\Big]\Big\}dx_1\,dy_1$$

ahonnan a $\Delta T\to 0$ határátmenettel a következ őegyenletet kapjuk $u(T, x, y)$-ra:

$$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}(-i\alpha_1 x-\lambda x-\omega y)+\frac{\partial u}{\partial y}(-i\alpha_1 y+\omega x-\lambda y)+ \tag{3.4}$$

$$+u\left[-i\alpha_1+i\alpha_1\lambda(x^2+y^2)-\frac{\alpha_1^2}{2}(x^2+y^2)+i\alpha_2(x^2+y^2)\right].$$

Legyen

$$u(T, x, y)=u_1(T, x, y)e^{i\alpha_1\frac{x^2+y^2}{2}}$$

akkor (3.4) alapján

$$\frac{\partial u_1}{\partial T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial u_1}{\partial x}(\lambda x+\omega y)+\frac{\partial u_1}{\partial y}(-\omega x+\lambda y)+u_1 i\alpha_2(x^2+y^2), \tag{3.5}$$



vagy polárkoordinátákban

$$\frac{\partial u_1}{\partial T} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}+\frac{\partial u_1}{\partial r}\left(\frac{1}{2r}+\lambda r\right)+u_1 i\alpha_2 r^2. \tag{3.5'}$$

Az $u_1(T, r)=v(T, r^2)=v(T, \varrho)$ leképezéssel $v(T, \varrho)$ a

$$\frac{\partial v}{\partial T} = 2\varrho\frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2}+2\frac{\partial v}{\partial \varrho}(1-\lambda\varrho)+i\alpha_2\varrho v \tag{3.6}$$

differenciálegyenletnek tesz eleget, mégpedig a nyilvánvaló

$$v(0, \varrho)=e^{\frac{i\alpha_1}{2}\varrho} \tag{3.7}$$

kezdeti feltétellel. Jelölje $v$ *Laplace*-transzformáltját $w$, azaz

$$w(T, \gamma) = \int_0^\infty e^{-\gamma\varrho}v(T, \varrho)\,d\varrho.$$

A (3.6) és (3.7) összefüggések alapján

$$\frac{\partial w}{\partial T} = \frac{\partial w}{\partial \gamma}(-2\gamma^2+2\lambda\gamma-id_2)+w(2\lambda-2\gamma), \tag{3.8}$$

$$w(0, \gamma) = \frac{1}{\gamma-\frac{i\alpha_1}{2}}. \tag{3.9}$$

A (3.8) egyenlet megoldását ismert módszerek alapján egyszerűen (lásd pl. [13] 339 o.) egyszerűen megkaphatjuk. Legyenek $\gamma_1, \gamma_2$ az

$$\gamma^2-\lambda\gamma+\frac{i\alpha_1}{2} = 0, \quad \gamma_{1,2}=\frac{\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-2i\alpha_2}}{2} \tag{3.10}$$

egyenlet gyökei. A (3.8) egyenlet első integráljai

$$c_1 = T-\frac{1}{2(\gamma_1-\gamma_2)}\log\frac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_2} \tag{3.11}$$

$$c_2 = \log w+\frac{1}{2}\log(\gamma-\gamma_1)(\gamma-\gamma_2)-\frac{\lambda}{2(\gamma_1-\gamma_2)}\log\frac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_2}$$

lesznek. $T=0$ esetén

$$\frac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_2}=e^{-2(\gamma_1-\gamma_2)c_1}, \tag{3.12}$$

$$\gamma=\frac{\gamma_1-\gamma_2 e^{-2(\gamma_1-\gamma_2)c_1}}{1-e^{-2(\gamma_1-\gamma_2)c_1}},$$

és így

$$\log w+\tfrac{1}{2}\log\frac{e^{-2(\gamma_1-\gamma_2)c_1}(\gamma_1-\gamma_2)^2}{(1-e^{-2(\gamma_1-\gamma_2)c_1})^2}+\lambda c_1=c_2, \tag{3.13}$$

$$w=\frac{(1-e^{-2(\gamma_1-\gamma_2)c_1})}{e^{-c_1(\gamma_1-\gamma_2)}(\gamma_1-\gamma_2)}e^{c_2-\lambda c_1}.$$

(3.9) és (3.13) alapján

$$\frac{1-e^{-2c_1(\gamma_1-\gamma_2)}}{e^{-c_1(\gamma_1-\gamma_2)}(\gamma_1-\gamma_2)}e^{c_2-\lambda c_1}-\frac{1}{\dfrac{\gamma_1-\gamma_2 e^{-2(\gamma_1-\gamma_1)c_1}}{1-e^{-2(\gamma_1-\gamma_2)c_1}}-\dfrac{i\alpha_1}{2}}=0.$$

(3.11) behelyettesítésével a következő összefüggést kapjuk

$$\frac{1-\dfrac{\gamma-\gamma_2}{\gamma-\gamma_2}e^{-2T(\gamma_1-\gamma_2)}}{e^{-T(\gamma_1-\gamma_2)}\sqrt{\dfrac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_2}}(\gamma_1-\gamma_1)}e^{\log w+\frac{1}{2}\log(\gamma-\gamma_1)(\gamma-\gamma_2)-\frac{\lambda}{2(\gamma_1-\gamma_2)}\log\frac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_2}-\lambda T}\cdot$$

$$\cdot e^{\frac{\lambda}{2(\gamma_1-\gamma_2)}\log\frac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_2}}=\frac{1}{\dfrac{\gamma_1-\gamma_2\dfrac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_2}e^{-2T(\gamma_1-\gamma_2)}}{1-\dfrac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_2}e^{-2T(\gamma_1-\gamma_2)}}-\dfrac{i\alpha_1}{2}},$$

ahonnan

$$w=\frac{(\gamma_1-\gamma_2)e^{\lambda T-T(\gamma_1-\gamma_2)}}{(\gamma-\gamma_2)\left(\gamma_1-\dfrac{i\alpha_1}{2}\right)+(\gamma-\gamma_1)\left(\dfrac{i\alpha_1}{2}-\gamma_2\right)e^{-2T(\gamma_1-\gamma_2)}}. \tag{3.14}$$

A $\chi_1(T)$, $\chi_2(T)$ valószínűségi változók karakterisztikus függvényét (feltétel nélküli!) (3.14)-ből a $\gamma=\lambda-\frac{i\alpha_1}{2}$, helyettesítéssel kapjuk meg (3.10) felhasználásával:

$$u_{\chi_1,\chi_2}(T)=M(e^{i\alpha_1\chi_1(T)+i\alpha_2\chi_2(T)})=w\left(T,\lambda-\frac{i\alpha_1}{2}\right)= \tag{3.15}$$

$$=\frac{4\lambda(\lambda^2-2i\alpha_2)^{1/2}e^{\lambda T-T\sqrt{\lambda^2-2i\alpha_2}}}{(\lambda-i\alpha_1+\sqrt{\lambda^2-2i\alpha_2})^2-(\lambda-i\alpha_1-\sqrt{\lambda^2-2i\alpha_2})^2e^{-2T\sqrt{\lambda^2-2i\alpha_2}}}.$$

Legyen $\varkappa=\lambda T$, akkor a $\lambda\chi_1$, $\lambda^2\chi_2$ változók karakterisztikus függvénye

$$\frac{4(1-2i\alpha_2)^{1/2}e^{\varkappa}}{(1-i\alpha_1+\sqrt{1-2i\alpha_2})^2e^{\varkappa\sqrt{1-2i\alpha_2}}-(1-\alpha_1\sqrt{1-2i\alpha_2})^2e^{-\varkappa\sqrt{1-2i\alpha_2}}} \tag{3.16}$$

alakú lesz.



(2.3) alapján az ismeretlen $\lambda$ paraméterre vonatkozó maximum likelihood egyenlet

$$\frac{1}{\lambda}-(\chi_1-T)-\lambda\chi_2=0$$

alakú lesz, melynek egyetlen pozitív megoldása

$$\hat\lambda=\frac{-(\chi_1-T)+\sqrt{(\chi_1-T)^2+4\chi_2}}{2\chi_2}. \tag{3.17}$$

A $\hat\lambda$ becslés eloszlásának meghatározására tekintsük a

$$P_\lambda\{\hat\lambda<x\}=P_\lambda\left\{\chi_2-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}(T-\chi_1)>0\right\}=P_\lambda\{x^2\chi_2+x\chi_1>Tx+1\} \tag{3.18}$$

összefüggést, ahonnan $x=\lambda y$ és $\zeta_I=\lambda y\chi_1+\lambda^2y^2\chi_2$, $\lambda T=\varkappa$ helyettesítéssel

$$P_\lambda\{\hat\lambda<\lambda y\}=P_\varkappa\{\zeta_y>\varkappa y+1\}, \tag{3.19}$$

ahol $\zeta_y$ karakterisztikus függvénye (3.16) alapján

$$\frac{4(1-2iy^2\alpha)^{1/2}e^{\varkappa}}{(1-iy\alpha+\sqrt{1-2iy^2\alpha})^2e^{\varkappa\sqrt{1-2iy^2\alpha}}-(1-iy\alpha-\sqrt{1-2iy^2\alpha})^2e^{-\varkappa\sqrt{1-2iy^2\alpha}}} \tag{3.20}$$

alakû. Innen adott $\varkappa$ és $y$ esetén a megfelelő valószínűségek kiszámíthatók.

Legyen $p=1-2iy^2\alpha$, akkor $\zeta_y$ valószínűségi változó eloszlásának* *Laplace*-transzformáltja (3.20) alapján a következő,

$$\frac{8y^4e^{\varkappa}}{(y-1)^2}\frac{\sqrt{p}\,e^{-\varkappa\sqrt{p}}}{(p-1)}\left[\frac{1}{(\sqrt{p}+1)^2}+\frac{1}{(\sqrt{p}+2y-1)^2}-\frac{2}{(\sqrt{p}+1)(\sqrt{p}+2y-1)}\right]\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+\dfrac{p-1}{2y}-\sqrt{p}}{1+\dfrac{p-1}{2y}+\sqrt{p}}\right)^{2k}\cdot e^{-2k\varkappa\sqrt{p}},$$

vagy az $s^2=p$ és $a=2y-1$ helyettesítéssel

$$\frac{8y^4e^{\varkappa}}{(y-1)^2}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\varkappa(2k+1)s}\frac{s^2}{(s-1)(s+1)(s+a)}\frac{(s-1)^{2k}}{(s+1)^{2k+1}}\frac{(s-a)^{2k}}{(s+a)^{2k+1}}. \tag{3.21}$$

A (3.21) összeg első tagjának, az

$$\frac{8y^4e^{\varkappa}}{(y-1)^2}\frac{p^2e^{-\varkappa p}}{(p-1)(p+a)^2(p+1)^2}$$

* (az eloszlásfüggvényé)

kifejezésnek inverz *Laplace*-transzformáltja (felhasználva például DITKIN, KUZNYECOV [6] táblázatait)

$$\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{\varkappa y}{\sqrt{2(\varkappa y+1)}}-\frac{\sqrt{\varkappa y+1}}{y\sqrt{2}}\right)\right]+ \tag{3.22}$$

$$+\left[1-\Phi\left(\frac{\varkappa y}{\sqrt{\varkappa y+1}}+\frac{\sqrt{\varkappa y+1}}{y\sqrt{2}}\right)\right]e^{2\varkappa}\left[-\frac{y^2(y^2+4y-2)}{2(y-1)^4}+\frac{(6y-2)(\varkappa y^2+\varkappa y+1)}{2(y-1)^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{\varkappa y+1}{(y-1)^2}-\frac{(\varkappa y^2+\varkappa y+1)^2}{y^2(y-1)^2}\right]+$$

$$+\left[1-\Phi\left(\frac{\varkappa y}{\sqrt{2(\varkappa y+1)}}+\frac{(2y-1)\sqrt{\varkappa y+1}}{y\sqrt{2}}\right)\right]e^{2\varkappa y+\frac{\varkappa y+1}{2y^2}[(2y-1)^2-1]}\left[\frac{(2y-1)(4y^2-2y+1)}{2(y-1)^4}-\right.$$

$$\left.-\frac{(2y-1)^2}{y(y-1)^3}\left(\varkappa y^2+(2y-1)(\varkappa y+1)\right)\right]+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\varkappa y+1}}{y(y-1)^2}e^{\varkappa-\frac{\varkappa y+1}{2y^2}-\frac{\varkappa^2y^2}{2(\varkappa y+1)}}\left[\frac{7y^2-5y+1}{y(y-1)}y^2+\varkappa y^2+\varkappa y+1\right],$$

ahol

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du.$$

Ez a közelítés $\zeta_y$ eloszlásának meghatározására $\varkappa$ nagy értékeire megfelelő. További közelítés kapható, ha pl. figyelembe vesszük, hogy

$$\frac{(p-a)^{2k}}{(p+a)^{2k+1}}$$

alakú függvények inverz *Laplace*-transzformáltja

$$e^{-ax}\left[\frac{e^{2ax}}{k!}\frac{d^k(2ax)^k e^{-2ax}}{dx^k}\right]$$

alakú, tehát a megfelelő *Laguerre*-polinomok fognak szerepelni. $\varkappa$ kis értékeire a megfordítási képlet alapján $\zeta_y$ sűrűségfüggvénye

$$f_\zeta(x)=\sum_k e^{s_k x}b(s_k)$$

alakú lesz, ahol $s_k$ a (3.20) függvény pólusait jelöli, $b(s_k)$ pedig az $s_k$ pontban levő reziduumot. A pólusokra vonatkozó egyenlet

$$\frac{(1+ys+\sqrt{1+2y^2s})^2}{(1+ys-\sqrt{1+2y^2s})^2}=e^{-2\varkappa\sqrt{1+2y^2s}}$$

alakú.



A fenti összefüggések alapján lehetséges $\lambda$-ra konfidencia intervallumok szerkesztése, a számításokhoz azonban elektronikus számológép igénybevételére volt szükség. A következő pontban szereplő példában $T=60$ év és $\hat{\varkappa}=3{,}6$ esetén a megfelelő felső és alsó becslések (a valószínűségi szinteket az indexbe téve)

$$\varkappa_{0,90}=5{,}5,\quad \varkappa_{0,95}=6{,}2,\quad \varkappa_{0,975}=7{,}8, \tag{3.23}$$
$$\varkappa_{0,10}=1{,}27,\quad \varkappa_{0,05}=0{,}82,\quad \varkappa_{0,025}=0{,}46.$$

A (3.19) és (3.20) összefüggésekből látható, hogy $\varkappa$ kicsiny értékeire

$$P_\varkappa\{\hat{\varkappa}<y\varkappa\}=\exp\left\{-\frac{1}{y}\right\}, \tag{3.24}$$

azaz a $\hat{\varkappa}/\varkappa$ hányados $\chi^2$ eloszlású 2 szabadságfokkal, míg $\varkappa$ nagy értékeire

$$P\{\varkappa<\hat{\varkappa}+y\sqrt{\hat{\varkappa}}\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-t^2/2}\,dt, \tag{3.25}$$

azaz $\hat{\varkappa}$ normális eloszlású $D^2(\hat{\varkappa})\sim\hat{\varkappa}$ szórásnégyzettel. Mivel $\hat{\varkappa}$ eloszlása folytonos tetszőleges $0<\alpha<1$ és $0<\varkappa<\infty$ értékekre van olyan $k$, hogy

$$P_\varkappa\{\hat{\varkappa}>k\}=\alpha.$$

A

$$k=k_\alpha(\varkappa)$$

összefüggésből a

$$\varkappa=\varkappa_\alpha(k)$$

összefüggést kapjuk, ahonnan nyilvánvaló, hogy

$$P_\varkappa\{\varkappa<\varkappa_\alpha(\hat{\varkappa})\}\equiv\alpha$$

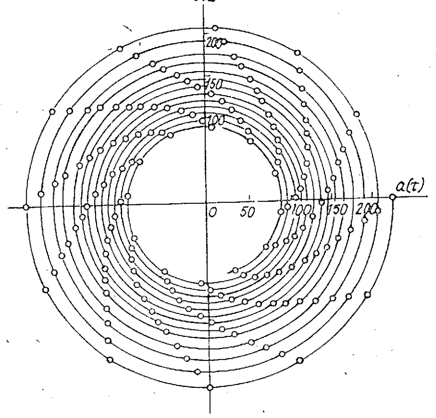
és $\varkappa_\alpha(\hat{\varkappa})$ lesz a $\varkappa$-ra vonatkozó konfidencia határ. A számítások azt mutatták, hogy $k_\alpha(\varkappa)$ monoton növekvő és így lézetik az inverze, tehát megfelelő konfidencia határok kaphatók.

## 4. § Egy geofizikai probléma

Földünk pillanatnyi forgástengelye a Föld mint ellipszoid kistengelyéhez viszonyítva állandóan változtatja helyzetét (ez az ún. „szabad mutáció"). Ezen helyváltoztatásnak van egy egyéves periódusa, melynek kiszűrése után megmarad az ún. *Chandler*-féle változás, melynek mintegy 14 hónapos periódusa van. Ez az ingadozás azonban már nem pontosan periodikus mozgás és emellett az amplitúdója is 10—20 éves hullámokban változik. Az 1. ábra, mely a pólus *Chandler*-féle komponenseinek empirikus korrelációs függvényét ábrázolja, jól mutatja, hogy szépen teljesülnek azok a feltételek, melyek az 1. §-ban kerültek ismertetésre (az empirikus korrelációs függvény alakja szabályos spirális, melyet vö. (1.2)-vel).

Az 1. ábra A. JA. ORLOV [11] dolgozatának 6. táblázata alapján készült a MOSZKVAI EGYETEM VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI TANSZÉKÉN. Az említett 6. táblázat

$x(t), y(t)$ koordinátáiból leválasztva azokat a komponenseket, melyeknek periódusa egy év, kapjuk a $\xi(t)$, $\eta(t)$ komponensű stacionárius *Gauss—Markov*-folyamatot. Az ábrán körrel jeleztük az 0,1 év nagyságú $\tau$ növekményekhez tartozó értékeket, mivel évente — immár több mint 70 éve — 10 mérést végeznek, s ezeket a méréseket még a Nagy Honvédő Háború idején sem szakították meg. Az ábra alapján szemléletesen is azonnal megállapítható, hogy a $2\pi/\omega$ periódus kb. 14 hónapos. A 2.1 tétel éppen azt mondja ki, hogy $\omega$ valóban pontosan becsülhető, tehát a becslésünk megbízható. A kapott spirális alapján azt lehetne várni, hogy a $\lambda$ paramétert is pontosan lehet becsülni, ez azonban nincs így, mint ahogyan azt a 3. §-ban láttuk.



1. ábra. $\tau=0,1\cdot n$; $n=0,1,2,\ldots,156$

A földforgás pólusának nevezzük a forgástengely és a földfelszín metszéspontját *P*-t, melynek koordinátáit jelölje $(x, y, z)$, ahol a koordináták a Föld tehetetlenségi ellipszoidjának tengelyei irányában mérendők. A földet abszolút szilárd testnek föltételezve az *Euler*-féle egyenletekből

$$x = x_0 \cos(a^2 r_0 t + \tau)$$
$$y = y_0 \sin(a^2 r_0 t + \tau)$$
$$z = z_0$$

mozgást kapnánk: azaz a forgási pólus egy körmozgást ír le a tehetetlenségi pólus (a földfelszín és földtengely metszéspontja) $I(0, 0, z_0)$ körül. Ha az időegység egy csillagászati nap $r_0 = 1$ és $T = \dfrac{2\pi}{a} \sim 304$ nap.

Az eddigiekben feltettük, hogy a tehetetlenségi pólus időben nem változtatja helyét, azonban a különböző tömegváltozások (pl. levegőáramlások) hatására I szinten változtatja helyét. A függőleges komponens változásait elhanyagolva az egyenlítő síkjával párhuzamos síkban mérve $\varphi$ és $\psi$ koordinátáit, azok az idő függvényei lesznek, melyek periodikus komponensektől (éves vagy féléves periódussal) és véletlen határoktól is függnek. Azaz

$$\varphi(t) = \sum_k a_k \cos(\lambda_k t + \alpha_k) + \Delta_1(t)$$

$$\psi(t) = \sum_k b_k \cos(\lambda_k t + \beta_k) + \Delta_2(t)$$

ahol a $\Delta_1(t)$ és $\Delta_2(t)$ sztochasztikus folyamatokról fel lehet tételezni — első durva közelítésben —, hogy ún. „fehér zaj"-szerűek.

Mivel az új koordinátarendszerben a forgási pólus $\xi$, $\eta$ koordinátái a

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{2\pi}{T}(\eta - \psi)$$
$$(4.1) \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{2\pi}{T}(\xi - \varphi)$$



egyenletrendszernek tennének eleget, melynek megoldásai nagy „kilengéseket" is kell hogy mutassanak — amit a valóságban nem tapasztaltak —, még figyelembe kell venni a föld rugalmasságát is, ami a $T$ periódus meghosszabbodását eredményezi ugyan, de nagy „kilengések" nem válnak lehetségessé. A rugalmasság figyelembe vételével a (4.1) rendszer helyett a

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = a\eta + b\xi + \sum_k a_{1k} \cos(\lambda_k t + \theta_{1k}) + \Delta_1(t)$$
$$(4.2) \qquad \frac{d\eta(t)}{dt} = -a\xi + b\eta + \sum_k a_{2k} \cos(\lambda_k t + \theta_{2k}) + \Delta_2(t)$$

egyenleteket kapjuk, melyeknek viselkedésével éppen az előző pontokban foglalkoztunk.

A (4.2) egyenlettel kapcsolatban elmondottak természetesen mutatják, hogy az (1.1) egyenletben szereplő $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ folyamatokról feltételezni, hogy azok *Wiener*-folyamatok, a Föld pólusai mozgásának vizsgálatánál csak első közelítés és durva idealizálás. Azonban ORLOV [13] adatai azt mutatják, hogy a

$$\xi' = -\lambda\xi - \omega\eta + f, \quad \eta' = \omega\xi - \lambda\eta + g$$

feltételezéssel élve az $f(t)$ és $g(t)$ távoli értékei függetlenek, így helyettesítésük megfelelő „fehér zajokkal" törvényes. Úgy tűnik, hogy ezen ekvivalens $\varepsilon_i(t)$ $(i=1, 2)$ „fehér zajok" intenzitásának meghatározásában levő hiba elég kicsiny ahhoz, hogy ne legyen hatással a $\lambda$ paraméter becslésére. Egy olyan elmélet kidolgozása azonban, mely ennek az állításnak pontos matematikai megfogalmazását adná, nincs meg, bár igen hasznos lenne.

Hatvan év adatainak feldolgozása alapján a következő eredmények adódtak

$$\hat{\omega} = 5{,}274; \quad \hat{\varkappa} = 3{,}6, \quad 2\pi : \hat{\omega} = 1{,}191, \quad \sigma(2\pi : \hat{\omega}) = 0{,}006$$ [3]

A (3.25) aszimptotikus formula szerint

$$\sigma^2(\hat{\varkappa}) = 3{,}6$$

és $\alpha < 0{,}03$ szint esetén $\varkappa$ negatív alsó becslést kapnánk — ami lehetetlen — tehát a normális eloszlással való közelítés még egyáltalán nem megfelelő.

## IRODALOM

[1] ARATÓ, M: Folytonos állapotú Markov-folyamatok statisztikai vizsgálatáról, I., *M. T. A. III. Oszt. Közleményei* **14** (1964) 13—24.
[2] ———, Folytonos állapotú Markov-folyamatok statisztikai vizsgálatáról, II., *M T. A. III. Oszt. Közleményei* **14** (1964) 135—157.
[3] Арато, М.: Некоторые статистические вопросы стационарных гауссовских марковских процессов *Disszertáció*, Moszkva, Állami Egyetem, 1962.

[3] A $\lambda$ és $\omega$ paraméterek becslése megtalálható pl. [10]-ben is, ahol $\lambda = 1/15$ és $2\pi:\omega = 1{,}193$ értékek adódtak. Ehhez közeli értékeket kapott még 1942-ben JEFFREYS [9], azonban a [12] és [15] dolgozatokban ettől lényegesen eltérő $\lambda = 0{,}3$ és $\lambda = 0{,}01$ értékeket kaptak. Ezen eltérés okaira mutat rá jelen dolgozat 3. pontja (vö. az ott szereplő $\varkappa$ alsó és felső becslésekkel (3.23)).

[4] Арато, М. — Колмогоров, А. Н. — Синай, Я. Т.: Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского процесса, ДАН **146** (1962) 747-750.
[5] Арато, М. — Рыкова, Л. — Синай, Я. Т.: До верительные границы для коэффициента затухания комплексного стационарного гауссовсного марковского процесса. Теория вероятн. и ее прим (sajtó alatt).
[6] Диткин — Кузнецов: Справочник
[7] Дынкин Е. Б.: Функционалы от траекторий марковских случайных процессов, ДАН **104** (1955) 691-693.
[8] Федоров Е. П.: Тр. Полтавск. гравиметрич. общ 2,3 (1948)
[9] Jeffreys, H.: *Monthlv Not. Roy. Astr. Soc. Geophys. Suppl.* **100**, 139 (1942)
[10] Munk, W. H.—Macdonald, G. J. P.: *The Rotation of the Earth*, Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Math., 1960.
[11] Орлов А. Ч.: Служба широты, Изд. А. Н. СССР, 1958
[12] Панченко: Тр. 14 Астрономич. Конф. СССР, Изд. А. Н. СССР, 1960, 232.
[13] Степанов В. В.: Курс дифференциальных уравнений, Москва, 1959.
[14] Striebel, Ch. T: Densities for Stochastic Processes, *Annals of Math. Stat.* **30** (1959) 559—567.
[15] Walker, A. M.,—Young, A.: The analysis of the observations of the variation of latitude. *Monthly notices. Roy. Astr. Soc. Geophys. Suppl.*. **115** (1955) 443, **114** (1957) 119.

(Beérkezett: 1964. VI. 15.)